Φυλλάδιο ασκήσεων 3.

Η γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως: $y'+P(x)y = R(x)$

Να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων

1. $y'+y=0$, 2. $y'+y=e^x$, 3. $y'-2y=\sin x$, 4. $y'+y=x-e^x$, 5. $y'+\frac{1}{x}y=x^2$

6. $xy'+y=x$, 7. $xy'+y=xe^x$, 8. $xy'+2y=x$, 9. $xy'+2y=x^2$,

10. $(1-x^2)y'+2xy=(1-x^2)^2$, 11. $y'-x^2y=x^2$, 12. $y'+xy=x$,

13. $xy'+(x+1)y=1$, 14. $xy'+(x+1)y=x$, 15. $y'-\tan xy=1$,

16. $(1-x^2)y'+2xy=1+x^2$, 17. $y'-(1+\cos x)y+e^x\cos x=0$,

18. $y'+(\tan x-1)y+\cos x=0$

Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών

1. $y'+y=x, \quad y(0)=1$

2. $y'+y=e^{-x}, \quad y(0)=0$

3. $y'+\frac{1}{x}y=1, \quad y(1)=1$

4. $(x+1)y'-y=x^2+2x, \quad y(1)=-1$

5. $y'+\tan x\cdot y=\frac{1}{\cos x}, \quad y(\pi)=1$

6. $y'-\cos x\cdot y+\cos x=0, \quad y(0)=0$

Οι εξισώσεις που ακολουθούν δεν είναι γραμμικές. Μπορούν όμως να μετατραπούν σε γραμμικές, εναλλάσσοντας απλώς τους ρόλους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Προσέξτε το παράδειγμα που ακολουθεί και εφαρμόστε την ίδια διαδικασία στις υπόλοιπες.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $y'y^2=y+xy'$

Η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y'=\frac{y}{y^2-x}$$

Αν αντί της συνάρτησης $y = y(x)$ (που τη θεωρούμε ανεξάρτητη μεταβλητή) πάρουμε την συνάρτηση $x = x(y)$ (που είναι η προηγούμενη λυμένη ως προς x) έχουμε:

$$x' \equiv \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{y^2 - x}{y} = y - \frac{x}{y}$$

Δηλαδή η δοθείσα είναι ισοδύναμη με την

$$x' - \frac{1}{y}x = y$$

που είναι γραμμική με ανεξάρτητη μεταβλητή y και εξαρτημένη μεταβλητή x και λύνεται κατά τα γνωστά. Η λύση της είναι $x = \frac{c}{y} + \frac{y^2}{3}$

1. $yy' = xy' + y$, 2. $y'e^{y} = 1 + xy'$, 3. $y' = 2xyy' + y^2 + 1$

Δείξτε γενικότερα ότι οι εξισώσεις που μπορούν να μετατραπούν σε γενικές με την εναλλαγή των μεταβλητών τους έχουν υποχρεωτικά τη μορφή

$$y' = \frac{A(y)}{B(y) + C(y)x}$$