

Φυλλάδιο ασκήσεων 5.

Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις

Βρείτε τη λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων εξετάζοντας ταυτόχρονα αν ανήκουν σε κάποια από τις ήδη γνωστές περιπτώσεις οπότε θα μπορούσαν να λυθούν και μ' ένα διαφορετικό τρόπο:

1. $x dy + y dx = 0$,
2. $(y - x) dx + (x + y) dy = 0$
3. $2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$
4. $2xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$
5. $(2x - y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy = 0$
6. $y^2 dx + (2xy + e^y) dy = 0$
7. $y \cos x dx + (\sin x + 2y) dy = 0$
8. $(3x^2 y^2 + 1) dx + (2x^3 y + ye^y) dy = 0$
9. $(y + 2xy^3) dx + (x + 3x^2 y^2) dy = 0$
10. $(2xy^2 + 1) dx + (2x^2 y - 1) dy = 0$
11. $(2x - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0$
12. $(y + e^x) dx + (x + 2y) dy = 0$
13. $\left(x - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y + \frac{1}{x}\right) dy = 0$
14. $(ye^{xy} + 1) dx + (xe^{xy} - 2y) dy = 0$
15. $(3x^2 + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0$

Σε αρκετές από τις παραπάνω εξισώσεις η λύση μπορεί να βρεθεί πολύ γρήγορα ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους της ώστε να γίνει εμφανές ότι η κάθε ομάδα αποτελεί το διαφορικό μιας απλής συνάρτησης των x και y . Παραδείγματος χάρι για την εξίσωση

$$(y + 2xy^3) dx + (x + 3x^2 y^2) dy = 0$$

Η κατάλληλη ομαδοποίηση είναι η

$$(y dy + x dx) + (2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy) = 0$$

απ' όπου βλέπουμε ότι η πρώτη ομάδα αποτελεί το διαφορικό της συνάρτησης xy και η δεύτερη το διαφορικό της συνάρτησης x^2y^3 . Η εξίσωση επομένως θα γράφεται ισοδύναμα σαν

$$d(xy) + d(x^2y^3) = d(xy + x^2y^3) = 0$$

και άρα η λύση της θα δίνεται από τη σχέση

$$xy + x^2y^3 = c$$

Σε όσες από τις παραπάνω νομίζετε ότι μια τέτοια απλή ομαδοποίηση των όρων τους είναι δυνατή χρησιμοποιήστε την για να βρείτε τη λύση παράλληλα με τη συστηματική μέθοδο που αναπτύξαμε στο μάθημα.