Φυλλάδιο ασκήσεων 9.

Γενικές ασκήσεις στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.)

1. **Συμπλήρωμα Θεωρίας: Μείωση κατά μια τάξη της ομογενούς εξίσωσης 2ας τάξεως**

   Δίνεται η γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως $ay'' + by' + cy = 0$ με σταθερούς συντελεστές. Αν ρ μια ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $y(x) = e^{\rho x}Y(x)$ οδηγεί σε μια πρωτοτάξια εξίσωση.

   Λύση: Είναι $y' = e^{\rho x}(Y' + \rho Y)$ και $y'' = e^{\rho x}(Y'' + 2\rho Y + \rho^2 Y)$ οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση παίρνουμε

   $aY'' + (2a\rho + b)Y + (a\rho^2 + b\rho + c)Y = 0$ και αφού ρ μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωση $a\rho^2 + b\rho + c = 0$, οπότε θα έχουμε $aY'' + (2a\rho + b)Y = 0$.

   Θέτοντας $Y' = u$ έχουμε τελικά $au' + (2a\rho + b)u = 0$ που είναι γραμμική ομογενής εξίσωση $1^{ης}$ τάξης.

2. Δείξτε ότι η μείωση αυτή επιτυγχάνεται και με την παρουσία μη ομογενούς όρου $R(x)$.

   Λύση: Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι

   $aY'' + (2a\rho + b)Y' = e^{-\rho x}R(x)$ και για $Y' = u$ παίρνουμε

   $au' + (2a\rho + b)u = e^{-\rho x}R(x)$ που είναι γραμμική εξίσωση $1^{ης}$ τάξεως.

   Παρατήρηση: Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιπλέον μέθοδος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

3. Μια καμπύλη γ του επιπέδου με εξίσωση $y = f(x)$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν η κλίση σε κάθε σημείο της (x, y) ισούται με το άθροισμα των συντεταγμένων της, να βρεθεί η καμπύλη γ.

4. α) Να βρεθούν τα Α και Β ώστε η συνάρτηση $f(x) = Ax^3e^x + B$ να είναι μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$.
   β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ με $y(0) = y'(0) = 1$.

5. α) Να μετασχηματισθεί η εξίσωση $y'' + \frac{2}{x}$y'+y=0 με την αντικατάσταση $u = xy$ και νε βρεθεί η γενική λύση της.
   β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \sqrt{1 + e^x}$ να λυθεί η Δ.Ε. $y' = \frac{y}{\sqrt{1+e^x}}$

6. α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = \int_0^x f(t)\sinh(x - t)\,dt$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y'' - y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$.
   Υπενθυμίζεται ότι $sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ και $coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
   β) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $y'' - y = sinx$.

7. α) Αν η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(x) = \int_0^x tg(x - t)dt$ να αποδειχθεί ότι $f''(x) + f'(x) = g(-x) + \int_{-x}^0 g(t)dt\,,\ f(0) = f'(0) = 0$.
   β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών $y'' + y' = e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0$.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + \int_0^x e^{x-t} f(t)dt = e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. $y'' + y' = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -2$. Στη συνέχεια, λύνοντας την παραπάνω Δ.Ε., να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$.

9. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ τέτοια ώστε $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt\,, \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Να προσδιορισθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^x ty(t)dt = x^2 + y(x)$.

11. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $\frac{1}{1+y^2} = \ln(1+x^2)$.

12. Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει προς τα κάτω σε ομογενές βαρυτικό πεδίο βαρύτητας g με ταχύτητα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας και συντελεστή τριβής λ (δηλ. $F = -\lambda \upsilon^2$). Να μελετηθεί η χρονική συμπεριφορά της ταχύτητάς του $\upsilon(t)$. Δίνεται ότι $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = 0$.

13. Ένα σώμα μάζας m απωθείται από την αρχή με μια δύναμη ανάλογη από την απόστασή του από αυτήν (δηλ. $F = kx$, k σταθερά), ενώ ταυτόχρονα υφίσταται μια δύναμη τριβής ανάλογη με την ταχύτητα (δηλ. $F = -\lambda\upsilon$, λ ο συντελεστής τριβής). Που θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από χρόνο t αν η αρχική του θέση και η ταχύτητα είχαν τις τιμές $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$; Θα καταφέρει η απωστική δύναμη να υπερνικήσει τις τριβές και να «σπρώξει» το σώμα μέχρι το άπειρο; Συζητείστε ποιοτικά την απάντησή σας.

14. Να λυθεί η Δ.Ε. $y^2dx + (2xy - y^2e^y)dy = 0$.

15. Ένας εθνικός δρυμός μπορεί να θρέψει έναν πληθυσμό το πολύ 100 ελαφιών. Προς το παρόν στο δρυμό ζουν 10 ελάφια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των ελαφιών $P(t)$, t σε έτη, περιγράφεται μέσω της εξίσωσης $\frac{dP}{dt} = r(100 - P)P$, όπου $r = 0.001$. Πότε θα φθάσει ο πληθυσμός των ελαφιών τα 50 άτομα; (Δίνεται $ln9 \approx 2.2$).

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$. Να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.

17. Να βρεθεί η καμπύλη $y = f(x)$ της οποίας το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ αυτής, των αξόνων και της καθέτου στον άξονα Ox από το σημείο της $P(x, y)$, να είναι ίσο με $ay - bx$, όπου a, b σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

18. Μια καμπύλη $(\gamma): y = f(x)$ διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $M(2,16)$. Το τυχόν σημείο της $P(x, y)$ έχει συντεταγμένες τα σημεία $A(x, 0)$ και $B(0, y)$. Αν το εμβαδόν του χωρίου OBP είναι τριπλάσιο του εμβαδού του χωρίου OAP να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης γ.