

Φυλλάδιο ασκήσεων 2.

Ομογενείς εξισώσεις: Μια κατηγορία εξισώσεων που ανάγονται σε διαχωρίσιμες με μια απλή αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής.

Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$1. y' = \frac{x^2 + 2y^2}{2xy}$$

$$2. y' = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$3. y' = \frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}$$

$$4. y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$5. y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$$

$$6. y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$7. y' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$8. y' = \frac{2xy + y^2}{3x^2 + 2xy}$$

$$9. y' = \frac{y^2 + 2xy}{xy + x^2}$$

$$10. y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$$

Δείξτε ότι οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεν είναι οι μόνες που ανάγονται σε διαχωρίσιμες με την αλλαγή της μεταβλητής $u = y/x$. Δείξτε συγκεκριμένα ότι η πιο γενική εξίσωση με αυτή την ιδιότητα είναι η

$$y' = \frac{y}{x} + g(x)\phi(y/x)$$

Κατασκευάστε μόνοι σας τις πιο γενικές μορφές εξισώσεων που ανάγονται σε διαχωρίσιμες με κάποια από τις ακόλουθες αλλαγές μεταβλητής

α) $u = xy$ β) $u = x^v y$