Η τριχοτόμηση της γωνίας με τη βοήθεια συναρτησιακών σχέσεων

του Αντώνιου Α. Αντωνίου

Περίληψη:
Δύο από τα διάσημα μαθηματικά προβλήματα είναι η με κανόνα και διαβήτη, τριχοτόμηση της γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Μαζί με το διπλασιασμό του κύβου (Δήλιο πρόβλημα), αποτελούν τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας. Είναι γνωστό ότι το «άλυτο» των προβλημάτων αυτών αντιμετωπίσθηκε οριστικά με τη θεωρία του Galois (1832)[1].
Είναι επίσης γνωστό ότι η επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι δυνατή με τη βοήθεια καμπύλων (άρα και οργάνων) ανωτέρου του 2ου βαθμού, όπως είναι η κισσοειδής του Διοκλή για το Δήλιο πρόβλημα, η κογχοειδής καμπύλη του Νικομήδη για την τριχοτόμηση της γωνίας (πρβλ. και [4]) και η υπερβατική καμπύλη του Ρώσου μηχα-νικού Abdank Aba kanowicz (1890) για τον τετραγωνισμό του κύκλου (πρβλ. [2]).
Ένα όμως πραγματικά ενδιαφέρον θέμα είναι η τριχοτόμηση της γωνίας, αλλά και ο τετραγωνισμός του κύκλου, με τη βοήθεια της σπείρας του Αρχιμήδη και κατ' επέκταση με τη βοήθεια συναρτησιακών σχέσεων.
Το θέμα αυτό διαπραγματευόμαστε, με σχετική συντομία στη συνέχεια.

[1] Η αντιμετώπιση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου απαίτησε πιο «μοντέρνες» μαθηματικές έννοιες, όπως οι υπερβατικοί αριθμοί (Cantor 1873, Hermite 1874, Lindemann 1882).

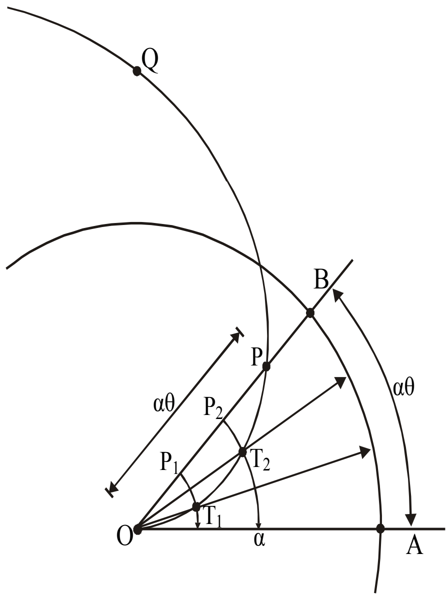
Zusammenfassung:
Zwei der berűhmten mathematischen Probleme sind die Dritteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Zusammen mit dem Delischen Problem sind die drei klassischen Prpbleme der Antike.
Es ist bekannt, dass das "Unlösbare" dieser Probleme mit der Galois-Theorie endgűltig bewiesen woerden ist. Es ist auch bekannt, dass die Lösung dieser Probleme mit der Hilfe n-grades Kurven ($n \geq 2$) möglich ist.
In diesem Artikel wird, sowohl die Drittteilung des Winkels als auch die Quadratur des Kreises mit Hilfe der Spirale von Archimedes und funktionalen Gleichungen behandelt. Es wird dabei berűcksichtigt, dass die Spirale von Archimedes ein Spezialfall der funktionalen Gleichungen ist.

1. Η σπείρα του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης στο έργο του «Περί ελίκων» μελέτησε με τρόπο εξαιρετικά κομψό τις ιδιότητες της επίπεδης έλικας ή σπείρας, η οποία ονομάζεται προς τιμήν του ***«Σπείρα του Αρχιμήδη»***.
Η καμπύλη αυτή ορίζεται ως εξής:
Ορισμός (1): Θεωρούμε την ημιευθεία ΟΒ, η οποία μπορεί να περιστρέφεται του σταθερού σημείου Ο. Πάνω σ' αυτήν κινείται σημείο Ρ με σταθερή ταχύτητα από το Ο προς το Β. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ρ κατά τη διπλή αυτή κίνηση καλείται σπείρα του Αρχιμήδη.
Η σπείρα του Αρχιμήδη, όχι μόνο τριχοτομεί τη γωνία ΑΟΒ (βλ. επόμενο σχήμα), όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, αλλά και τη χωρίζει σε n ίσες γωνίες.

Ο παραπάνω ορισμός ισοδυναμεί με τον ακόλουθο:

Ορισμός (2): Δοθέντος ενός κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ=α (βλ. διπλανό σχήμα), θα λέμε ότι το σημείο Ρ ανήκει στη σπείρα, αν η απόσταση του από το Ο ισούται με το μήκος τόξου με επίκεντρη γωνία ΑΟΒ=Ο.



Η ισοδυναμία των παραπάνω ορισμών (1) και (2) προκύπτει άμεσα: Πράγμα-τι, σύμφωνα με τον ορισμό (1) το σημείο Ρ συμμετέχει σε δύο κινήσεις.

Κατά τη μια περιστρέφεται περί του σημείου Ο με τη γωνιακή ταχύτητα, έστω ω, και κατά την άλλη κινείται επί της ΟΒ με γραμμική ταχύτητα, έστω υ.

Επομένως σε χρόνο t η θέση του παραπάνω σημείου θα περιγράφεται από το ΟΡ=r και από τη γωνία θ ακτινίων

Άρα θα είναι: $\omega=\frac{\theta}{t}$ ή $\frac{\upsilon}{\alpha}=\frac{\theta}{t}$, απ' όπου προκύπτει: $\upsilon t=\alpha\theta$ ή $OP=\alpha\theta$ ή $r=\alpha\theta$.

Η τελευταία σχέση αποτελεί προφανώς και την εξίσωση της σπείρας σε πολικές συντεταγμένες.

α) Η τριχοτόμηση της γωνίας

Η τριχοτόμηση της γωνίας ΑΟΒ με τη βοήθεια της σπείρας είναι τώρα εύκολη υπόθεση.
Διαιρώντας το τμήμα ΟΡ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα $OP_1=OP_2=OP_3$, $P_3 \equiv P$ και θεωρώντας τους κύκλους (O,OP_1), (O,OP_2), (O,OP_3) ορίζονται στη σπείρα τα σημεία T_1, T_2. Οι ευθείες OT_1, OT_2 χωρίζουν την αρχική γωνία ΑΟΒ σε τρεις ίσες γωνίες.
Είναι προφανές ότι διαιρώντας το τμήμα ΟΡ σε n ίσα ευθ. τμήματα $OP_1=OP_2=...OP_n$, $P_n \equiv P$ και θεωρώντας τους κύκλους (O,OP_1), (O,OP_2), ..., (O,OP_n) ορίζονται στη σπεί-ρα τα σημεία T_1, T_2,..., T_{n-1} και επομένως οι ευθείες OT_1, OT_2, ..., OT_{n-1} χωρίζουν την αρχική γωνία ΑΟΒ σε n ίσες γωνίες.

β) Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Είναι φανερό, ότι για $\theta=\frac{\pi}{2}$ είναι $r=\alpha\frac{\pi}{2}$, οπότε το ορθογώνιο με βάση 2α και ύψος $\alpha\cdot\frac{\pi}{2}$ έχει εμβαδόν $\pi\alpha^2$.
Έτσι, με τη βοήθεια της σπείρας του Αρχιμήδη, επιτυγχάνεται και ο τετραγωνισμός του κύκλου.

2. Η γενικευμένη n-σπείρα

Παρατηρώντας ότι το άθροισμα δύο σπειρών του Αρχιμήδη $r=\alpha\theta$, $r=b\theta$, είναι μια άλλη αρχιμήδεια σπείρα $r=(\alpha+b)\theta$, προκύπτει το ενδιαφέρον συμπέρασμα, ότι το πρό-βλημα της τριχοτόμησης της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου ακτίνας α+b, θα μπορούσε να επιλυθεί είτε μέσο της σπείρας $r=\alpha\theta$ παραπέμπουν στον ακόλουθο γενικευμένο αριθμό (με R_+ συμβολίζουμε το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών).

Ορισμός: Έστω η σταθερός φυσικός αριθμός $n \geq 2$.
Ορίζουμε σαν γενικευμένη σπείρα (n-σπείρα), τη συνάρτηση $F: R_+^2 \to R_+$ η οποία για $\alpha, b, \theta \geq 0$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

i) $F(\alpha+b, \theta)=F(\alpha,\theta)+F(b,\theta)$

ii) $F(\alpha, \frac{\theta}{n})=\frac{1}{n}F(\alpha,\theta)$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τη n-σπείρα:

Θεώρημα:

Για $n \geq 2$, μια συνάρτηση $F: R_+^2 \to R_+$ είναι n-σπείρα, αν και μόνο αν, υπάρχει συνάρτηση φ τέτοια, ώστε: $F(\alpha,\theta)=\alpha\varphi(\theta)$ και $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}\varphi(x)$, για κάθε $x \in R_+$ και $\varphi(0)=0$.

Απόδειξη

Έστω F μια n-σπείρα. Ορίζουμε την φ από την ισότητα: $\varphi(\theta)=F(1,\theta)$, οπότε:

$\varphi\left(\frac{\theta}{n}\right)=F\left(1,\frac{\theta}{n}\right)\overset{(ii)}{=}\frac{1}{n}F(1,\theta)=\frac{1}{n}\varphi(\theta)$ και $\varphi(0)=0$, αφού: $\varphi(0)=\varphi\left(\frac{0}{n}\right)=\frac{1}{n}\varphi(0)$.

Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει: $F(\alpha,\theta)=\alpha F(1,\theta)=\alpha\varphi(\theta)$.
Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο γενικότερο Λήμμα (Λήμμα Darboux), για $f(\alpha)=F(\alpha,\theta)$.
Για την απόδειξη του Λήμματος βλ. [1].

Λήμμα (Darboux):

Έστω η συνάρτηση f: R→R, για την οποία ισχύει: f(x+y)=f(x)+f(y) (εξίσωση Cauchy). Αν η f είναι:
α) συνεχής σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της ή
β) μη αρνητική (ή μη θετική) σε μια περιοχή του x ή
γ) φραγμένη σ' ένα διάστημα (α,b), τότε: f(x)=f(1)x για κάθε $x \in R$.

Συνέπειες του παραπάνω θεωρήματος είναι τα ακόλουθα πορίσματα.

Πόρισμα (1): Έστω F μια n-σπείρα. Τότε, για α>0, η καμπύλη r=F(α,θ), σε πολικές συντεταγμένες, χωρίζει κάθε γωνία n ίσα μέρη.

Απόδειξη: Αν η συνάρτηση φ(θ) χαρακτηρίζει μια γωνία θ ακτινών, τότε η αλήθεια του πορίσματος προκύπτει από τις σχέσεις: r=F(α,θ)=αφ(θ) και $F\left(\alpha, \frac{\theta}{n}\right) = \alpha \frac{1}{n} \varphi(\theta)$

Πόρισμα (2): Αν η F είναι μια γενικευμένη σπείρα, η οποία για n=3 και n=5 είναι συνεχής ή μονότονη, τότε η F είναι η σπείρα του Αρχιμήδη F(α,θ)=αθ.

Απόδειξη: Από την ομογένεια της φ ισχύει: $\varphi(3^k \cdot 5^m \cdot \theta) = 3^k \cdot 5^m \cdot \varphi(\theta)$, όπου k, m θετικοί ακέραιοι. Από το γεγονός, επίσης, ότι $\varphi\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{1}{3^k}\varphi(\theta)$, $\varphi\left(\frac{\theta}{5^m}\right) = \frac{1}{5^m}\varphi(\theta)$, k, m θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι:

$\varphi(3^{-k} \cdot 5^{-m} \cdot \theta) = \varphi\left(\frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{5^m}\theta\right) = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{5^m}\varphi(\theta) = 3^{-k} \cdot 5^{-m} \cdot \varphi(\theta)$.

Άρα: $\varphi(3^k \cdot 5^m \cdot \theta) = 3^k \cdot 5^m \cdot \varphi(\theta)$ για κάθε $k,m \in Z$.

Επειδή όμως $\frac{\ln 3}{\ln 5} \notin Q$, (Q το σύνολο των ρητών), το σύνολο $\{3^k \cdot 5^m : k,m \in Z\}$ είναι πυκνό στο R_+ (βλ. επόμενη βοηθητική πρόταση και απόδ. στο [3]), οπότε η αλήθεια του πορίσματος προκύπτει από τη συνέχεια ή τη μονοτονία το φραγμένο της F.

Βοηθητική πρόταση:

Το σύνολο $\{Z_{m,n} = \kappa^m \cdot \lambda^n : \kappa,\lambda \in N,\ m,n \in Z\}$ είναι πυκνό στο R_+, τότε και μόνο τότε, αν $\frac{\ln \lambda}{\ln \kappa} \notin Q$.

Παρατήρηση: Από την απόδειξη του πορίσματος (2) είναι φανερό ότι οι σπείρες του Αρχιμήδη βρίσκονται «πυκνά» μέσα στο R_+.

Βιβλιογραφία

[1] Aczel J.: Lectures on Functional Equations and their Applications, Academic press 1996, New York, 31-4

[2] Klein F.: Vorträge űber ausgewählte Themen der Elementaren Geometrie, Leipzig 1895

[3] Μερκουράκης Σ., Φουρφουλάκης Σ.: Θέματα Δυναμικής Τοπολογίας, Μαθημα-τική Επιθεώρηση, 13 (1979), 15-16

[4] Μπρίκας Μ.Α.: Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, Αθήνα, 1970.